

CARACTERÍSTICAS DE LAS PRÁCTICAS ESTUDIANTILES DE FIGURACIÓN ANTE UN FENÓMENO DE VARIACIÓN

Iván Esteban Pérez, Eduardo Carrasco Henríquez
Universidad de Los Lagos (Chile)

ivanestebanperez@gmail.com, eduardo.carrasco@ulagos.cl

Pensamiento matemático, nivel medio.

Resumen. Este trabajo se planteó el propósito de caracterizar las prácticas estudiantiles de figuración ante un fenómeno de variación. En particular se aborda el estudio de los procesos de construcción de gráficas de fenómenos de variación, entendidas estas como recurso para modelar aquello que cambia y de cómo cambia. Se reportan interpretaciones a figuras que buscan presentar las entidades que varían en un fenómeno. Siguiendo con la noción de práctica socioescolar de figuración, se estructura un análisis desde las visiones locales y globales de la gráfica y se recurre a nociones teóricas provenientes de la teoría de la imagen y de los análisis semánticos sobre las diversas figuraciones que construyen los estudiantes, lo que permitan caracterizar prácticas socioescolares de figuración que están a la base de la construcción de gráficas de un fenómeno y que incorporan a figuraciones altamente icónicas como herramientas para construir una gráfica cartesiana escolar que modele el fenómeno evocado.

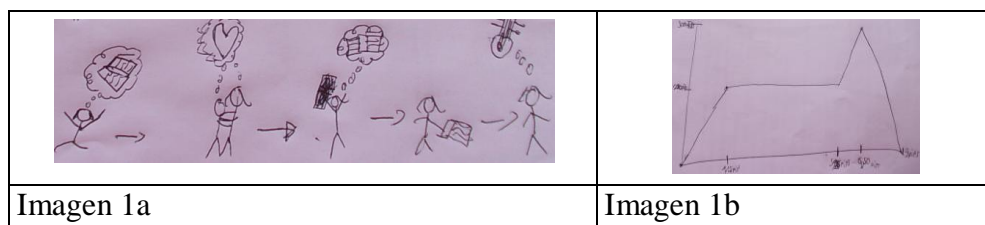
Introducción. Uno de los focos de estudio de la educación matemática en los últimos años ha sido el pensamiento variacional. Es posible encontrar un gran número de publicaciones en el área que pretenden aportar a la enseñanza de los tópicos de la matemática del cambio, caracterizando el pensamiento variacional, promoviendo situaciones de enseñanza, entregando orientaciones para la mejora en las prácticas docentes. En particular, en Latinoamérica surge el programa de investigación de *Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV)*, entendido “como una línea de investigación que, ubicada en el seno del acercamiento socioepistemológico, permite tratar la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos” (Cantoral & Farfán, 1998).

En el marco del *PyLV* cobra especial importancia, en relación a aquellas matemáticas elaboradas para manipular con el cambio, incorporar a los y las estudiantes a espacios de experimentación que favorezcan la construcción de unas “matemáticas vivas” y, al mismo tiempo, que tengan una experiencia de primera mano sobre la complejidad puesta en juego en su actividad, en situación escolar, a fin de reconocer y valorar el uso de herramientas matemáticas que traen a escena en sus elaboraciones personales y a la vez en aquellas del trabajo colectivo, enfrentados a comunicar sus hallazgos en ambientes interactivos de aula (Díaz, 2005).

Un rol importante en este tipo de actividad, lo tiene la figuración del cambio, entendida como la construcción de una figura de la variación de variables visualizadas en un fenómeno. En particular, la gráfica cartesiana escolar es la principal herramienta matemática para la figuración del cambio. Sin embargo el sistema escolar no logra que los estudiantes constituyan a la gráfica cartesiana en un herramienta para su actividad.

En particular, la articulación de una gráfica cartesiana escolar con el fenómeno de variación que representan, centrándose la actividad matemático escolar en la articulación de la gráfica con la expresión algebraica de una función o las tabulaciones de cada variable.

Carrasco y Díaz (2008), evidencian que, tanto estudiantes como profesores recurren a diversos tipos de dibujos, en particular a cómics antes que a las gráficas cartesianas para representar lo que varia en un fenómeno evocado. Los cómics son figuras altamente icónicas, como si fueran fotografías que van mostrando un espacio y cambios en el tiempo de aquello que interesa mostrar (ver imagen 1a), a diferencia de una gráfica cartesiana que ha dejado oculto, en su alto simbolismo, el movimiento y el espacio al representar el fenómeno a través de puntos/pares ordenados (ver imagen 1b) sin incorporar la experiencia de movimiento de una manera directa.



A la luz de ello se aborda una investigación posgradual que pretende avanzar en situaciones de enseñanza que permitan constituir a la gráfica cartesiana escolar en una herramienta para la actividad matemática en la modelación de fenómenos de variación. Herramienta que fortalezca procesos de visualización variacional. Investigación que enmarcada en el PyLV, reconoce la importancia de un enseñanza que construya eslabones entre la matemática que se enseña y aquellas formas de conocer y herramientas que los estudiantes han construido en su biografía, tanto escolar, como cotidiana. Aproximación que se articula desde la noción de prácticas socioescolares de figuración, entendidas como modos de operar compartidos por los actores escolares, para la construcción y la interpretación de figuraciones de entidades asociadas a un fenómeno (Carrasco y Diaz, 2012) .

De modo particular, en este reporte se muestran primeros resultados de una indagación exploratoria respecto de las figuraciones que recurren estudiantes al construir una imagen de lo que varia en un fenómeno evocado. Indagación que responde a la pregunta ¿cual es el rol que las figuraciones icónicas tienen en la figuración del cambio?. Mostrando primeras caracterizaciones respecto de la emergencia de figuraciones no cartesianas y su rol en la visualización de los estudiantes, de aquello que varia en fenómenos de variación

Antecedentes Teóricos. Reconocer el comportamiento de una gráfica o función requiere una visión dual local-global, cuyo uso significativo y articulado a lo largo de un sistema didáctico involucra reconocer el comportamiento inicial de la gráfica (conocer un todo en un cierto margen), complementando con una visualización global de la información geométrica (**Buendía, 2004**). Por su parte Cen (2006) señala que la construcción de gráficas permite al estudiante actitudes de argumentación, es decir, se puede construir y explicar una idea matemático mediante la graficación.

Torres (2004) señala que los significados y sistemas simbólicos se encuentran directamente en las gráficas, estos significados pueden detectarse a través del análisis cualitativo y cuantitativo de las gráficas de la posición y de la velocidad. Los significados se verán reflejados en las relaciones que los estudiantes logren establecer, es decir, a través de las gráficas de la posición y de la velocidad se pueden identificar intervalos que indiquen

cuándo el movimiento es más lento, más rápido o el cuerpo se detiene, cuándo la velocidad es positiva o negativa.

Sin embargo el uso de dibujos no cartesianos en los procesos de construcción de gráficas de variación desde fenómenos, hace necesario ampliar el estudio de la visualización de fenómenos de variación. Por ello, se adopta la noción de figuración de fenómenos de variación. En ella, se entiende a la figura como las disposiciones y formaciones de líneas que representan –en dos dimensiones- entidades ostensibles y no ostensibles, que se constituye en la actividad matemática como un modelo del fenómeno que figura, modelo compuesto por símbolos, que se materializan en aquellas partes de la figura que devienen en signos, los cuales van configurando una narración del fenómeno, que describe la covariación de las entidades que interesan (Carrasco y Diaz, 2012).

De este modo se incorpora al análisis de las figuras construidas por los estudiantes, nociones provenientes desde la teoría de la imagen y la esquemática. Teoría que reconoce que una figura tendrá una *función representativa* cuando se sustituye a la realidad de forma analógica; un *función simbólica*, cuando se adscribe a un concepto; y, una *función convencional* cuando sustituye a la realidad sin reflejar sus características. La imagen contiene un repertorio de elementos y estructuras de representación y responde a una sintaxis visual. Su comprensión involucra tres etapas: (a) la selección, exploración volitiva y proyectiva, en el campo visual de sus elementos; (b) la percepción de los elementos significativos a la cognición; y por último, (c) la integración del mensaje visual. Por tanto, una misma imagen puede evocar diversas comprensiones sobre la información del mundo que figura. (Carrasco y Diaz, 2012)

Metodología. Para una primera caracterización de los entendimientos estudiantiles de variación se utilizara una actividad propuesta en una secuencia tomada de lo Paquetes Didácticos diseñados por la Academia Institucional de Matemáticas Instituto Politécnico Nacional de México. Esta actividad pide a los estudiantes transitar por un ciclo de exploraciones gráficas. La situación de aprendizaje seleccionada para esta exploración se denomina “Epifanía” y consiste en hacer la gráfica del movimiento de una persona que se aleja de un punto de partida hasta 500 metros, para luego regresar y sólo dispone de nueve minutos. Pero durante dicho trayecto se detiene cuatro minutos. Se busca que los estudiantes comprendan el problema, y puedan construir una gráfica que represente los cambios de posición con respecto al tiempo.

La implementación exploratoria, en el marco de un estudio de caso, aborda tres casos de análisis: (a) El primer grupo lo componen cuatro estudiantes de tercer año medio del colegio Barrie Montessori de la Comuna de Peñalolen, Santiago de Chile, (b) El segundo caso lo compone un estudiante de séptimo año básico. Los estudiantes de ambos casos participan de un aula multigrado. El tercer caso lo compone un estudiante segundo año de la carrera de pedagogía en Matemáticas.

El análisis de las producciones se realiza en tres pasos: a) Primer análisis. Se utilizara el modelo propuesto por Torres(2004), el que busca identificar las visiones locales y globales de la gráfica; b) Segundo de análisis. Se describe cada figuración a partir de: El grado de iconicidad; Los componentes de la figura y su sintaxis, así como, distinciones de percepción que provee la Gestal -leyes de percepción- articuladas desde la teoría de la imagen, así como a las textualidades asociadas a su construcción. c) En un tercer nivel de análisis se recurre a la retórica de la imagen de Barthes (1964) para quien la imagen porta una polisemia de significados, de los cuales el observador puede elegir unos y descartar

otros. Se busca reconocer el mensaje connotado a la figuración, el cual asocia un significado particular a un elemento de la figura.

Análisis de las producciones estudiantiles. Figuración estudiantil un fenómeno de variación de posición con respecto al tiempo. Ante la consigna de realizar la gráfica del movimiento de una persona que se aleja de un punto de partida hasta 500 metros, para luego regresar y sólo dispone de nueve minutos y que durante dicho trayecto se detiene cuatro minutos, los estudiantes levantan figuraciones como las que se muestran a continuación (Ver imagen 2). Los estudiantes encuestados construyeron gráficas cartesianas cercanas al fenómeno, sin embargo para llegar a ellas presentaron figuraciones no cartesianas preliminares, tanto desde el recorrido espacial como comic. (ver fig. 1^a).

Primer Análisis. Respecto de la visión global del fenómeno, todos los estudiantes dan un visión global de los cambios de posición, sin embargo uno solo de ellos logran hacer trazos curvos que den cuenta de los cambios de velocidad. Es una figuración que pareciera quedarse en la visión global del desplazamiento.

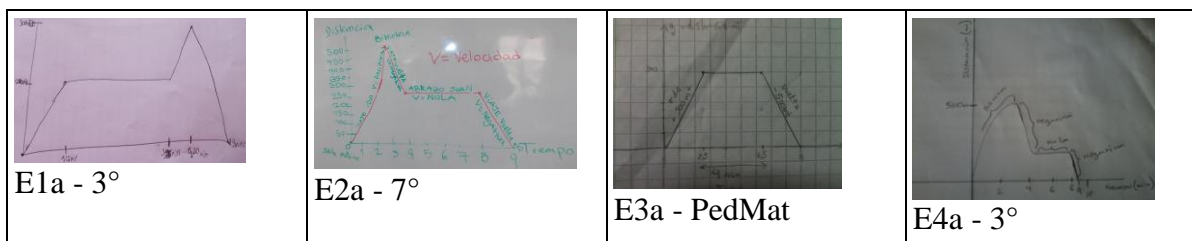


Imagen 2 – Gráficas

De forma local, en la construcción de su gráfica cartesiana los estudiantes plantean el trabajo en base a dos ejes (tiempo/distancia), se presentan casos en los cuales los ejes están graduados y otros en los que señalan solo los puntos donde la gráfica cambia. Los estudiantes (salvo uno) complementan con información textual señalando velocidad positiva, velocidad negativa o nula, la cual no es reflejada en el trazo. Solo un estudiante utiliza curvas para su gráfica reflejando el cambio de velocidad, en el grueso de las producciones se utilizaron líneas rectas. Se observa en las gráficas los cambios de dirección, marcando todos cinco puntos de cambio de la curva. identificando en ella la nulidad de movimiento durante cuatro minutos, distribuida de diferentes formas según el entendimiento del problema de cada estudiante a lo largo de los nueve minutos en los que transcurre la acción.

Segundo Análisis. Las figuraciones previas usadas por la mayoría de los estudiantes, son utilizadas como primeras aproximaciones para visualizar la situación. Recurren a descripciones del espacio y la traza del movimiento, dejando implícito aspectos del movimiento. Dos estudiantes representan el movimiento que envuelven a la acción. La porción de realidad que figuran los estudiantes responde al escenario donde se realizaba el movimiento, realizando una representación gráfica de la descripción “La biblioteca está en un punto diametralmente opuesto del salón de música en el patio circular, que tiene 500 metros de diámetro, de la escuela. Valentina tardó en total 9 minutos”.

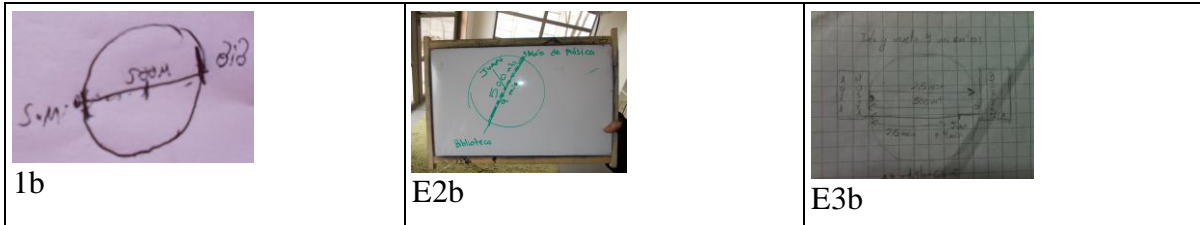


Imagen 3 – Representación Contexto

El repertorio de elementos lo constituyen el patio circular, el diámetro con su medida, y textualidades para señalar la ubicación del salón y la biblioteca, además de aportar información al contexto.

Dos sintaxis podemos apreciar en el grupo. La primera, refiere a un cómic, cuatro escenas de una persona en posición de caminata, marcando en la iconicidad del dibujo la velocidad. En la segunda, flechas a modos de vectores entres dos representaciones iconicas de los edificios de la escuela. Junto a ello se usan flechas, líneas continuas, que marcan dirección, indicando los movimientos realizados por Valentina. Presentan diversas escenas con las distintas acciones realizadas por Valentina, complementando con flechas para indicar el movimiento. Construyen la figuración de forma secuencial, utilizando instantes de referencia, indicando cambios de posición, así como connotar que forman parte de instantes posteriores al instante de referencia. El nivel de iconicidad de las figuraciones, es alto, y aún es posible identificar las relaciones espaciales del fenómeno, al complementar esta figuración con la representación del escenario donde se realiza el movimiento.

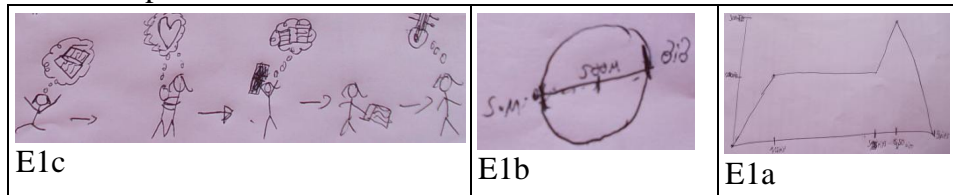


Imagen 4 – Secuencia movimiento, contexto y gráfica.

Tercer análisis. La representación del patio circular y de la ubicación de la sala de música y de la biblioteca dan encuadre y espacialidad a la zona en que se figuran los movimientos que realiza Valentina. Se constituyen en fondo y marco de la figura, que permiten al estudiante focalizar en un contexto la mirada en las trayectorias de Valentina. Marcan en los puntos en que cambia el movimiento con los valores numéricos presentes en el enunciado y así indicar las distancias a recorrer por Valentina. El movimiento, queda implícito en las líneas, las cuales invitan a ojo a recorrer una trayectoria en la imagen. Se recurre a la línea para expresar los movimientos de Valentina. Línea que para Kandinsky (1993) “*Es la traza que deja el punto al moverse y es por lo tanto su producto. Surge del movimiento al destruirse el reposo total del punto. Hemos dado un salto de lo estático a lo dinámico*”.

Las figuraciones, presentan los cinco puntos que después son figurados en la gráfica cartesiana, del mismo modo tienen marcadas las líneas de desplazamiento del sujeto. Elemento que se ven destacados en las figuraciones cartesianas. Ello da cuenta de la articulación que existe entre esta primera representación altamente icónica y las gráficas cartesianas realizadas después. Así, a modo de síntesis al enfrentar la tarea de hacer la gráfica del movimiento cumple con el rol de escenario en el cual se desarrolla el

movimiento y otro que representa el movimiento, ambos icónicos y de bajo simbolismo, presentan una representación figurativa del fenómeno. Ambos elementos fueron utilizados como etapas previas para comprensión de la situación, que posteriormente finalizó con la realización de la gráfica cartesiana.

Esta utilización de figuraciones, va constituyendo en una práctica socioescolar, toda vez que dos de los casos no responden a la misma institución educativa. Práctica que involucra la construcción de una representación figurativa del fenómeno, estructurando desde la evocación del mismo, dos elementos que dan sentido a la comunicación del fenómeno de variación: El escenario y/o marco en el que se desarrolla el movimiento, dado por un patio circular y los puntos clave donde ocurren cambios y, la figuración de la trayectoria del móvil en ese espacio. En un proceso que va despojando de elementos contextuales para poder graficar finalmente solo las variables solicitadas, en una práctica de representación figurativa del fenómeno, a las que concurren aspectos socioculturales, cognitivos y matemáticos.

A modo de conclusión. El punto de partida de en esta primera etapa fue identificar si los estudiantes eran capaces de comprender el fenómeno y a partir de ello construir una gráfica que representase los cambios de posición con respecto al tiempo. Ante este desafío todos los estudiantes construyen gráficas cartesianas en las cuales la mirada local solo puntualiza eventos específicos de la situación planteada, dejando de lado la graduación por intervalos desde la mirada de los ejes, invisibilizando posibles cambios en la velocidad de quien camina, asumiendo por tanto un movimiento constante, al utilizar mayoritariamente trazos rectos al graficar.

Las construcciones de figuraciones no cartesianas, previa a la construcción de la gráfica cartesiana escolar da cuenta de la necesidad de los estudiantes de representar el contexto y el movimiento de aquello que cambia en el fenómeno, aspectos no presentes en una gráfica que es un conjunto de puntos. Ello da cuenta de los aspectos socioculturales, cognitivos y matemáticos involucrados en su visualización del movimiento, y les permitiendo articular argumentos, herramientas y significados en la construcción de la gráfica propuesta.

Los resultados del análisis realizado, invitan a proyectar la articulación de diversas prácticas de figuración, haciendo concurrir figuraciones icónicas y su interpretación y figuraciones cartesianas escolares, que elicitán metáforas de base desde los casos presentados.

Bibliografía

- Buendía, G. (2004). Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico). *Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico nacional. Distrito federal, México.*
- Cantoral, R., & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, 42(3), 854–856.
- Carrasco, E., & Díaz, L. (2012). Dos casos de figuración para lo que varía. Documento interno de trabajo Postgrado en Educación Matemática, Universidad de los Lagos, Chile.
- Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.
- Díaz, L. (2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 8(2), 145–168.
- Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. (Tesis no publicada del Programa de Maestría). CICATA-IPN., México.